Soluzioni II prova di maturità per licei scientifici

Azzali Riccardo (a.k.a. FilosofiaScienza), Alessio Giarnetti, Sara Pattaro, Nicola De Rosa, Roberta Coletti, Mariapia D'Urso

22 Giugno 2023

Problemi

Problema 1

a) Per il primo punto dobbiamo trovare i parametri a,b,c nelle funzioni date nel testo. Per fare ciò dobbiamo guardare il grafico. Guardiamo Γ_1. Questa è una parabola di equazione $y = a(x+2)^2$. Dal grafico notiamo che per x=0, la curva tocca l'asse delle y nel punto y=1. Quindi sostituendo nell'eqauzione della parabola x=0 e y=1, otteniamo che **a=1/4**. Per la curva Γ_2, invece, vediamo che è un arco di circonferenza di raggio 1. Dato che in generale l'equazione di una circonferenza è $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ dove r è il suo raggio, otteniamo che $b = -r^2$, ovvero nel nostro caso **b=-1**. Per quanto riguarda Γ_3 invece abbiamo un ramo di iperbole che tocca l'asse delle x nel punto (1,0). Sostituendo questi valori della x e della y nell'equazione data $x^2 - y^2 + c = 0$, otteniamo ancora una volta **c=-1**.
Se vogliamo esprimere la funzione come funzione a tratti, dobbiamo esprimere l'arco della circonferenza e il ramo di iperbole in una forma funzionale del tipo $y = f(x)$. Questa risulta essere per Γ_2, $y = \sqrt{1-x^2}$ e per Γ_3 $y = \sqrt{x^2-1}$. Quindi, la funzione mostrata nel grafico si può scrivere come

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^2 & x \in [-2, 0] \\ \sqrt{1-x^2} & x \in (0,1) \\ \sqrt{x^2-1} & x \in [1,2] \end{cases} \tag{1}$$

Notiamo che se vogliamo scrivere la derivata di questa funzione otteniamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2) & x \in (-2, 0) \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & x \in (0,1) \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & x \in (1,2) \end{cases} \tag{2}$$

Vediamo cosa succede nei due punti in cui la funzione si divide, ovvero in x=0 e x=1.

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{2}(x+2) = 1 \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad (4)$$

Siccome sono diverse le derivate destre e sinistre, allora $f(x)$ non è derivabile in 0.
In $x = 1$, invece, entrambe le derivate destra e sinistra vanno ad infinito, di conseguenza anche in questo punto la funzione non è derivabile. Tutto ciò si poteva anche dedurre dal grafico nel quale si vede che in $x = 0$ c'è un punto angoloso, mentre in $x = 1$ è presente una cuspide.
Guardiamo ora ai bordi del dominio. Notiamo come in $x = -2$ e in $x = 2$ possiamo in realtà definire le derivate (a destra per in $x = -2$ e a sinistra per $x = 2$) e queste risultano essere $f'(-2) = 0$ e $f'(2) = 2/\sqrt{3}$. Passiamo ora alle rette tangenti nei punti indicati nell'esercizio. L'equazione della retta tangente ad una curva in un punto x_0, è in generale

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (5)$$

Per x=-2, abbiamo che $f(-2) = 0$ e $f'(-2) = 0$. Quindi la retta tangente è una retta orizzontale $y = 0$.
Per $x = 2$, invece, abbiamo $f(2) = \sqrt{3}$ mentre $f'(2) = 2/\sqrt{3}$. Quindi la retta tangente sarà

$$y = \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}(x - 2) \quad (6)$$

Consideriamo ora i due punti di non derivabilità. In $x = 0$, essendoci un punto angoloso non possiamo definire una singola retta tangente.
In $x = 1$, invece, essendoci una cuspide, possiamo dire che la retta tangente è una retta verticale che in questo caso ha equazione $x = 1$.

b) Abbiamo già scritto la formula della derivata. In ogni caso, il suo andamento si può dedurre anche dal grafico della funzione. Vediamo quello che possiamo dire intervallo per intervallo.
Γ_1 è sempre crescente nell'intervallo [-2,0]. Inoltre ha un minimo in x=-2 e ha la forma funzionale di una parabola, quindi ci aspettiamo che la sua derivata sia positiva e sia una retta che passa per il punto (-2,0). Notiamo come essendo $f(x)$ convessa lungo Γ_1, allora la $f'(x)$ sarà crescente in questo intervallo.
Γ_2 è un arco di circonferenza. Nel punto x=0 ha un massimo, mentre in x=1 ha pendenza verticale. Inoltre è sempre decrescente e ha convessità negativa. Ci aspettiamo una derivata negativa, che passa per il punto (0,0) e che decresce fino a $-\infty$ in x=1.
Γ_3 è un ramo di iperbole, con una pendenza infinita in $x = 1$, sempre crescente, concava. Ci aspettiamo quindi una derivata decrescente, positiva che scende da $+\infty$ dal punto $x = 1$.
Il risultato finale è mostrato in Fig. 1.
Ora dobbiamo studiare gli intervalli di convessità e concavità di $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$. Per fare ciò abbiamo bisogno della derivata seconda di F(x).

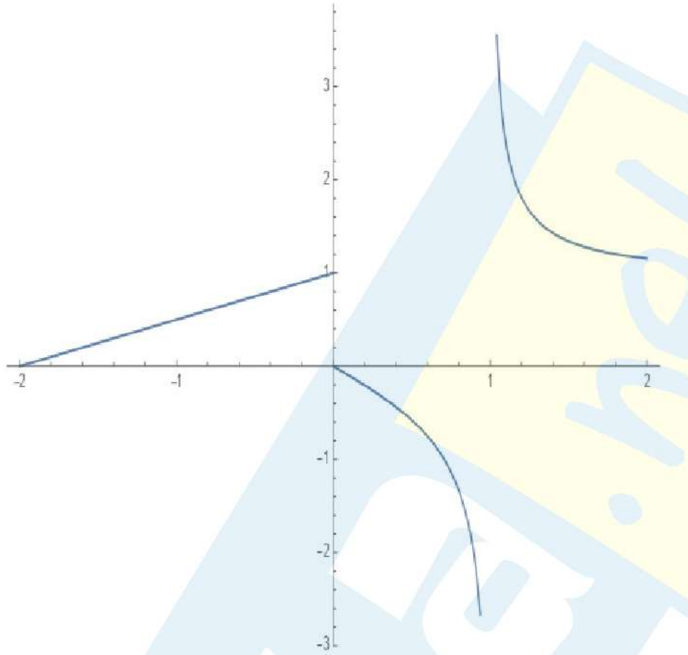

Figura 1: f'(x) per il problema 1

Usando il teorema fondamentale del calcolo integrale otteniamo direttamente che $F'(x) = f(x)$, da cui $F''(x) = f'(x)$. Quindi per sapere gli intervalli di convessità e concavità di F(x) ci basta guardare il segno della derivata $f'(x)$. Dai ragionamenti precedenti abbiamo visto che la derivata è positiva per $x \in [-2, 0)$ e $x \in (1, 2]$, negativa altrimenti. Quindi F(x) è convessa per $x \in [-2, 0)$ e $x \in (1, 2]$ e concava per $x \in (0, 1)$

c) Una funzione si può invertire se è biunivoca, ovvero iniettiva e suriettiva. Nel nostro intervallo la funzione è monotona crescente e si può dimostrare come in questo caso la funzione è sempre biunivoca e quindi invertibile. Per invertire la funzione ci basta partire dall'equazione del grafico ed esprimere la x in funzione della y. Quindi

$$y = \frac{1}{4}(x+2)^2 \tag{7}$$

da cui

$$2\sqrt{y} = (x+2) \tag{8}$$

che ci dice $x = 2(\sqrt{y}-1)$. Quindi, la funzione inversa che stavamo cercando è

$$h(x) = 2(\sqrt{x}-1)\,. \tag{9}$$

Studiamo questa funzione. Il suo dominio è dato sicuramente $x \geq 0$, altrimenti la radice non esiste. Tuttavia, dato che il dominio della funziona inversa è il codominio della funzione di partenza, dobbiamo considerare questa funzione $h(x)$ solo per $x \in [0,1]$. Infatti, il codominio di $f(x)$ nell'intervallo $[-2,0]$ è proprio $f(x) \in [0,1]$. Studiamo ora la funzione. Ai bordi del dominio

$$\lim_{x \to 0^+} 2(\sqrt{x}-1) = -2 \tag{10}$$

$$\lim_{x \to 1} 2(\sqrt{x}-1) = 0. \tag{11}$$

Lo studio della derivata ci dice che

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{12}$$

la quale è sempre positiva ma **non è definita per x=0, dove la funzione risulta non derivabile.** Questo ci dice che $h(x)$ è sempre crescente. Guardiamo ora la derivata seconda, che possiamo scrivere come

$$h''(x) = -\frac{1}{2x^{3/2}} \tag{13}$$

che nel dominio di definizione della funzione è sempre negativa. Ciò vuol dire che la nostra $h(x)$ è concava. Il grafico finale è mostrato in Fig. 2.

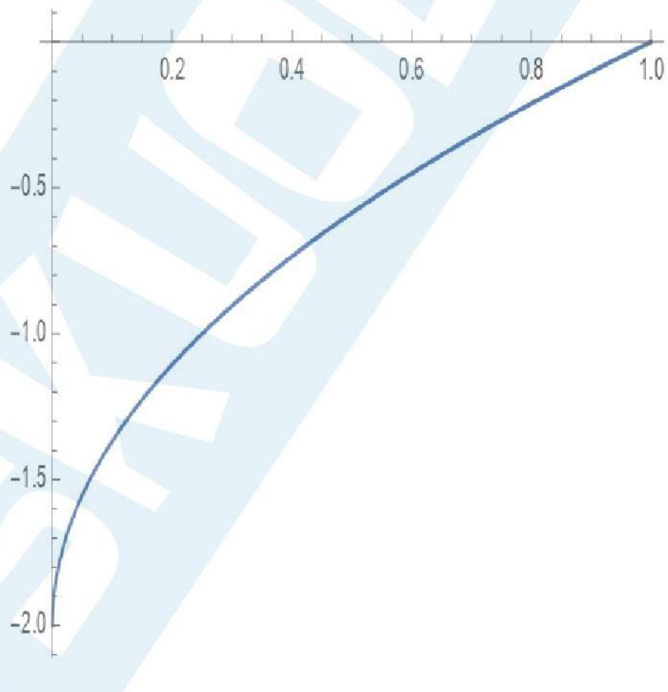

Figura 2: Grafico di h(x) relativo al punto c del problema n.1.

d) Per il punto 4 dobbiamo utilizzare un integrale definito. L'area sottesa dalla curva Γ_1 è infatti

$$A = \int_{-2}^{0} \frac{1}{4}(x+2)^2 dx = \left. \frac{1}{12}(x+2)^3 \right|_{-2}^{0} = \frac{2}{3} \quad (14)$$

Vogliamo ora trovare il valore di k per il quale

$$\int_{-2}^{k} \frac{1}{4}(x+2)^2 dx = \left. \frac{1}{12}(x+2)^3 \right|_{-2}^{k} = \frac{A}{2} = \frac{1}{3} \quad (15)$$

Risolvendo, otteniamo che

$$\frac{1}{12}(k+2)^3 = \frac{1}{3} \quad (16)$$

Da cui otteniamo che

$$k = \sqrt[3]{4} - 2 \quad (17)$$

Si può dimostrare come per questa scelta di k avremo che

$$\int_{k}^{0} \frac{1}{4}(x+2)^2 dx = \frac{A}{2} = \frac{1}{3} \quad (18)$$

Problema 2
Punto a) Sussistono tre casi:

- $a < 0$
  In questo caso il dominio della funzione è R in quanto il denominatore $x^2 - a$ risulta essere sempre positivo, di conseguenza non esistono discontinuità;

- $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$
  In questo caso il dominio della funzione è dato dai valori di x tali per cui: $x^2 - a \neq 0$, ossia $x \neq \pm\sqrt{a}$ In questo caso $x = \pm\sqrt{a}$ sono ascisse di punti di discontinuità di seconda specie e le rette $x = \pm\sqrt{a}$ sono asintoti verticali in quanto:

$$\lim_{x \to \sqrt{a}^-} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a(1-\sqrt{a})}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \sqrt{a}^+} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a(1-\sqrt{a})}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{a}^-} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a(1+\sqrt{a})}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \sqrt{a}^+} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a(1+\sqrt{a})}{0^-} = -\infty$$

- $a = 1$
  La funzione ha come dominio $x \neq \pm 1$ e $x = 1$ è di discontinuità eliminabile di terza specie in quanto:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}.$$

  In questo caso $x = -1$ è ascissa di discontinuità di seconda specie e la retta $x = -1$ è asintoto verticale in quanto:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x+1} = -\frac{1}{0^-} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x+1} = -\frac{1}{0^+} = -\infty.$$

In tutti i casi, la famiglia di funzione presenta per $a \neq 0$ la retta $y = 1$ come asintoto orizzontale in quanto:

- Se $a \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = 1.$$

- Se $a = 1$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Punto b)
L'intersezione tra $f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$ con la retta $y = 1$ deve soddisfare l'equazione seguente:

$$\frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = 1, \longrightarrow x^2 - ax = x^2 - a \longrightarrow a(x-1) = 0 \longrightarrow x = 1$$

Quindi il punto di intersezione è $A(1, 1)$ per $a \neq 1$.
Calcoliamo la derivata prima di $f_a(x)$, si ha:

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= \frac{(2x - a)(x^2 - a) - 2x(x^2 - ax)}{(x^2 - a)^2} = \\ &= \frac{2x^3 - 2ax - ax^2 + a^2 - 2x^3 + 2ax^2}{(x^2 - a)^2} = \\ &= \frac{ax^2 - 2ax + a^2}{(x^2 - a)^2} \end{aligned}$$

La retta tangente nell'origine ha equazione $y = mx$ con

$$m = f'_a(0) = \left[\frac{ax^2 - 2ax + a^2}{(x^2 - a)^2}\right]_{x=0} = 1$$

Pertanto, la tangente nell'origine è indipendente dal parametro a ed ha equazione y=x.

Punto c)

Consideriamo il caso $a \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$. La derivata prima è stata calcolata nel punto precedente ed è:

$$f'_a(x) = \frac{ax^2 - 2ax + a^2}{(x^2 - a)^2} = \frac{a(x^2 - 2x + a)}{(x^2 - a)^2}$$

Studiamo il fattore $x^2 - 2x + a$ del numeratore, in particolare il suo discriminante è: $\Delta = 4(1 - a)$ Pertanto, nel caso $a \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, il discriminante è sempre positivo e la funzione presenta due estremanti. Per capire la tipologia di estremante dobbiamo considerare due casi:

- $a < 0$
  In questo caso il numeratore della derivata prima è positivo se

  $$x^2 - 2x + a < 0 \longrightarrow 1 - \sqrt{1 - a} < x < 1 + \sqrt{1 - a}$$

  , di conseguenza la funzione è strettamente crescente per $x \in (1 - \sqrt{1 - a}, 1 + \sqrt{1 - a})$ ovvero $x = 1 - \sqrt{1 - a}$ è ascissa di minimo relativo e $x = 1 + \sqrt{1 - a}$ è ascissa di massimo relativo;

- $0 < a < 1$
  In questo caso il numeratore della derivata prima è positivo se

  $$x^2 - 2x + a > 0 \longrightarrow x < 1 - \sqrt{1 - a} \vee x > 1 + \sqrt{1 - a}$$

  di conseguenza la funzione è strettamente crescente per $x \in (-\infty, 1 - \sqrt{1 - a}) \cup (1 + \sqrt{1 - a}, +\infty)$ ovvero $x = 1 - \sqrt{1 - a}$ è ascissa di massimo relativo e $x = 1 + \sqrt{1 - a}$ è ascissa di minimo relativo.

Consideriamo ora a=-1 e studiamo la funzione $f_{-1}(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$;
- **Intersezione asse ascisse:** $x^2 + x = 0 \longrightarrow x = -1 \vee x = 0$;
- **Intersezione asse ordinate:** $x = 0 \longrightarrow y = 0$;
- **Positività:** $\frac{x^2 + x}{x^2 + 1} > 0 \longrightarrow x < -1 \vee x > 0$;
- **Asintoti verticali:** come da Punto a) non esistono asintoti verticali;
- **Asintoti orizzontali:** come da Punto a) $y = 1$ è asintoto orizzontale destro e sinistro;

- **Asintoti obliqui:** trattandosi di una funzione razionale fratta, la presenza dell'asintoto orizzontale esclude quella dell'asintoto obliquo;

- **Crescenza e decrescenza:** come sopra evidenziato, funzione è strettamente crescente per $x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ ovvero $x = 1-\sqrt{2}$ è ascissa di minimo relativo e $x = 1+\sqrt{2}$ è ascissa di massimo relativo, in particolare di seguito i punti di minimo

$$m\left(1-\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right),$$

e massimo relativo:

$$M\left(1+\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right).$$

- **Concavità e convessità:** la derivata seconda ha equazione:

$$f_(-1)''(x) = \frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$$

che è positiva per $(x+1)(x^2-4x+1) > 0$ ovvero se $x \in (-1, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, +\infty)$ ed è negativa se $x \in (-\infty, -1) \cup (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ pertanto la funzione è convessa negli intervalli $x \in (-1, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, +\infty)$ ed è concava negli intervalli $x \in (-\infty, -1) \cup (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$. Deduciamo quindi che la funzione presenta tre flessi a tangente obliqua:

$$F_1(-1, 0)$$

$$F_2\left(2-\sqrt{3}, \frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$F_3\left(2+\sqrt{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)$$

In Fig. 3 è mostrato il grafico di $f_{-1}(x)$

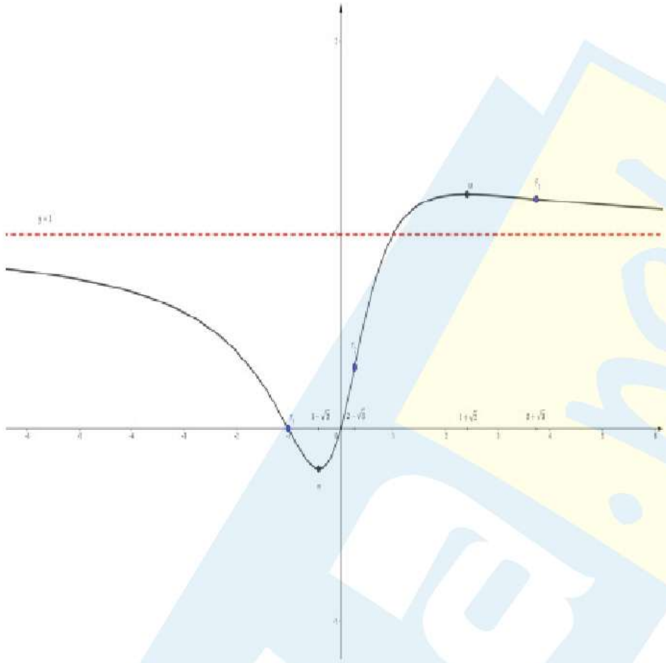

Figura 3: Grafico della funzione f(x) del problema n.2.

Punto d
L'area da calcolare è raffigurata Fig. 4 ed è rappresentata dal triangolo mistilineo ABE. Tale area si ottiene dall'integrale

$$
\begin{aligned}
S &= \int_1^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x^2+x}{x^2+1} \right) dx = \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x^2+1+x-1}{x^2+1} \right) dx = \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \left(x - 1 - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \\
&= \left[\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \arctan x \right]_1^{\sqrt{3}} = \\
&= \left[\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} - \frac{1}{2}\ln 4 + \frac{\pi}{3} \right] - \left[0 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4} \right] = \\
&= 2 - \sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{12} \sim 0.18
\end{aligned}
$$

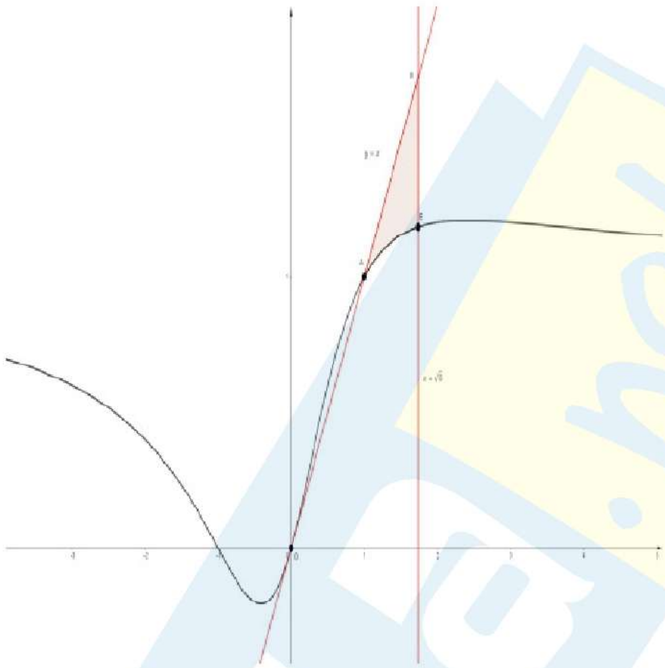

Figura 4: L'area della regione di piano richiesta al punto d del problema n.2.

Quesiti

Quesito 1. Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Sia O il centro del quadrato $BCDE$ costruito sull'ipotenusa, dalla parte opposta al vertice A. Dimostrare che O è equidistante dalle rette AB e AC.

Soluzione: Traccio le rette r e s, corrispondenti ai prolungamenti dei cateti del triangolo rettangolo ABC (AB e AC). Traccio le distanze OK e OH, due segmenti aventi origine nel centro O e perpendicolari ad AB e BC rispettivamente nei punti K e H.
Per dimostrare l'equidistanza del centro O dai cateti AB e BC, occorre dimostrare che $OK = OH$ e quindi che i triangoli OHC e OBK siano congruenti tra di loro.
Osservando Fig. 5 è possibile affermare direttamente che:

1) OC=OB, poiché il centro di un quadrato divide le sue diagonali in due segmenti congruenti;

2) I triangoli OHC e OBK sono rettangoli rispettivamente in K e H;

Inoltre, le rette r ed s sono perpendicolari tra di loro in A, mentre i segmenti OH e OK sono perpendicolari a r ed s. Da ciò si deduce che OH è parallelo a r mentre OK è parallelo ad s.
Applicando il Teorema delle rette parallele, è possibile notare che gli angoli HOC e KOB sono entrambi coniugati interni rispetto alle coppie di angoli create in-

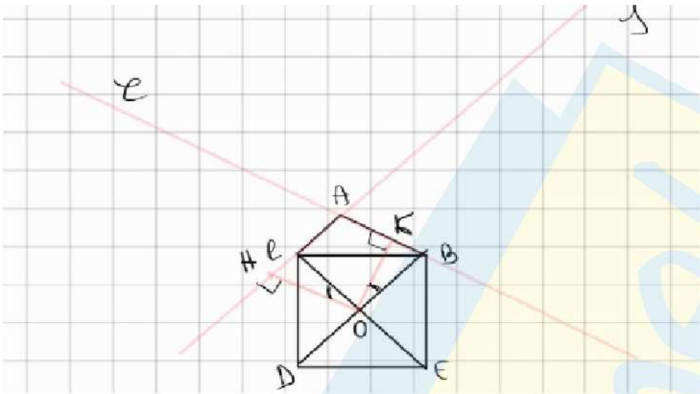

Figura 5: Schema relativo al quesito n.1.

tersecando le rette r e s e considerando come rette trasversali i prolungamenti delle diagonali del quadrato. Gli angoli HOC e KOB sono in particolare coniugati interni rispetto ad angoli uguali e quindi risultano congruenti tra di loro.
I due triangoli OHC e OBK sono quindi congruenti per i Criteri di congruenza dei Triangoli Rettangoli perché:

- OC=OB, poiché il centro di un quadrato divide le sue diagonali in due segmenti congruenti;
- I triangoli OHC e OBK sono rettangoli rispettivamente in K e H;
- Gli angoli HOC e KOB sono congruenti;

da cui si evince che OH=OK.

Quesito 2 Un dado truccato, con le facce numerate da 1 a 6, gode della proprietà di avere ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Calcolare le probabilità di ottenere, lanciando una volta il dado, rispettivamente: - un numero primo - un numero almeno pari a 3 - un numero al più pari a 3

Soluzione: Sia p la probabilità di ottenere un numero dispari lanciando il dado. Poiché le facce pari hanno probabilità doppia rispetto alle facce dispari, la probabilità di ottenere un numero pari è $2p$. La somma delle probabilità di tutte le facce deve essere 1, quindi abbiamo:

$$3p + 3 \cdot 2p = 1 \implies 9p = 1 \implies p = \frac{1}{9}$$

Quindi, la probabilità di una faccia dispari è $\frac{1}{9}$ e la probabilità di una faccia pari è $\frac{2}{9}$.
Ora possiamo calcolare le probabilità richieste:

1. Un numero primo: i numeri primi tra 1 e 6 sono 2, 3, 5. Quindi la probabilità è $2p$ (per il 2) + p (per il 3) + p (per il 5) $= 2 \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

2. Un numero almeno pari a 3: i numeri almeno pari a 3 sono 3, 4, 5, 6. Quindi la probabilità è p (per il 3) + $2p$ (per il 4) + p (per il 5) + $2p$ (per il 6) = $\frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

3. Un numero al più pari a 3: i numeri al più pari a 3 sono 1, 2, 3. Quindi la probabilità è p (per l'1) + $2p$ (per il 2) + p (per il 3) $= \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

Quesito 3 Considerata la retta r passante per i due punti $A(1, -2, 0)$ e $B(2, 3, -1)$, determinare l'equazione cartesiana della superficie sperica di centro $C(1, -6, 7)$ e tangente a r.

Soluzione: Troviamo inizialmente la retta passante per i punti A e B. Per trovare la retta nello spazio che passa per due punti è necessario trovare prima il vettore direttore della retta: $v(x_A - x_B; y_A - y_B; z_A - z_B) = (1-2; -2-3; 0+1) = (-1; -5; 1)$

Trovato il vettore direttore possiamo scrivere l'equazione della retta che è parallela al vettore v e che passa per il punto A:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1} \tag{19}$$

Le due equazioni vengono poste a sistema:

$$\begin{cases} -5(x-1) = -1(y+2) \\ y+2 = -5z \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x = -y - 7 \\ y+2 = -5z \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 5x + 7 = 0 \\ y + 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

Troviamo ora il piano perpendicolare ad r quindi il piano che ha come direttore il vettore v. L'equazione del piano risulta essere:

$$-1x - 5y + 1z + d = 0 \tag{20}$$

Sapendo che il piano passa per il punto C è possibile sostituire le coordinate del punto per trovare il valore del parametro d: $-1 + 6 \cdot 5 + 7 + d = 0$ quindi $d = 36$

Il piano risulta essere: $x + 5y - z + 36 = 0$

Trovata l'equazione del piano è possibile metterla a sistema con le equazioni cartesiane della retta per trovare le coordinate del punto di intersezione:

$$\begin{cases} x + 5y - z + 36 = 0 \\ y - 5x + 7 = 0 \\ y + 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 25x - z + 36 - 35 = 0 \\ y = 5x - 7 \\ y + 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 26x + 1 \\ y = 5x - 7 \\ 5x - 7 + 130x + 5 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5x - 7 = -7 \\ z = 26x - 1 = +1 \end{cases}$$

Note le coordinate del punto di incidenza è uindi possibile trovare il raggio della superficie sferica utilizzando la formula della distanza tra due punti:

$$r = \sqrt{(0-1)^2 + (-7+6)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{38} \tag{21}$$

Si ricorda che l'equazione di una superficie sferica è:$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$ Noto il raggio della superficie sferica è possibile scrivere la sua equazione: $(x-1)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = 38$

Quesito 4 Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume V, stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.

Soluzione: Consideriamo un parallelepipedo con lato di base pari ad l e altezza h. Il volume del parallelepipedo corrisponde a:$V = l^2 \cdot h$ Da questa relazione possiamo esplicitare l'altezza h ed esprimerla in funzione del volume del parallelepipedo: $h = \frac{V}{l^2}$
Il quesito chiede di trovare il minimo valore dell'area del parallelepipedo. L'area del parallelepipedo è composta dalla somma dell'area di base più l'area laterale: $Area = 2l^2 + 4lh$ Possiamo riscrivere l'espressione dell'area sapendo che $h = \frac{V}{l^2}$:

$$Area = 2l^2 + 4lh = 2l^2 + 4l\frac{V}{l^2} = 2l^2 + \frac{4V}{l} \tag{22}$$

Per trovare il minimo si calcola la derivata prima dell'area rispetto a l e si studia il segno:

$$\frac{dArea}{dl} = 4l - \frac{4V}{l^2} \geq 0 \tag{23}$$

Risolvendo la disequazione si trova che $l^3 \geq V$ L'equazione è quindi risolta per: $l^3 \geq V$ perciò il valore minimo della diagonale è quando $l = \sqrt[3]{V}$
Si esegue poi lo stesso procedimento per la diagonale del parallelepipedo. La diagonale del parallelepipedo corrisponde a: $d^2 = h^2 + (l\sqrt{2})^2$ Si sostituisce nell'espressione della diagonale l'espressione per l'altezza ($h = \frac{V}{l^2}$) e si ottiene: $\frac{V^2}{l^4} + 2l^2$ Per trovare il minimo si calcola la derivata prima dell'area rispetto a l e si studia il segno:

$$\frac{dDigonale}{dl} = (-4)\frac{V^2}{l^5} + 4l \tag{24}$$

$$\frac{-V^2}{l^5} + l \geq 0 \tag{25}$$

L'equazione è quindi risolta per: $l^3 \geq V$ perciò il valore minimo della diagonale è quando $l = \sqrt[3]{V}$ Si è verificato quindi che la condizione è la stessa per cui il il parallelepipedo ha area minima.

Quesito 5: Determinare l'equazione della retta tangente alla curva $y = \sqrt{25 - x^2}$ nel suo punto di ascissa 3, utilizzando due metodi diversi.

Soluzione:

Metodo 1: Utilizzando la derivata.
Utilizzando la formula della tangente, la derivata della funzione $y = \sqrt{25 - x^2}$ è $-x/\sqrt{25 - x^2}$. L'equazione della retta tangente a una curva in un punto specifico può essere trovata utilizzando la formula:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

dove m è la pendenza della retta tangente (che è la derivata della funzione nel punto), e (x_1, y_1) sono le coordinate del punto di tangenza.
Il punto di tangenza ha ascissa 3, quindi $x_1 = 3$ e $y_1 = \sqrt{25 - 3^2} = 4$.
La pendenza della retta tangente è la derivata della funzione valutata in $x_1 = 3$, quindi $m = -3/\sqrt{25 - 3^2} = -3/4$.
Sostituendo questi valori nella formula della tangente otteniamo l'equazione della retta tangente:

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$

Metodo 2: Utilizzando l'intersezione tra la circonferenza e la retta
La circonferenza è data dall'equazione $x^2 + y^2 = 25$, e la retta tangente può essere espressa come $y = mx + q$, dove m è la pendenza e q è l'intercetta.
Sostituendo y dall'equazione della retta nell'equazione della circonferenza otteniamo:

$$x^2 + (mx + q)^2 = 25$$

Questa è un'equazione di secondo grado in x e il suo discriminante è dato da:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

dove $a = 1 + m^2$, $b = 2mq$ e $c = q^2 - 25$.
Perché la retta sia tangente alla circonferenza, il discriminante deve essere zero, quindi abbiamo:

$$\Delta = (2mq)^2 - 4(1 + m^2)(q^2 - 25) = 0$$

Sappiamo che la pendenza m è data dalla derivata della funzione nel punto di tangenza, quindi $m = -3/4$. Sostituendo m e $x_1 = 3$ nell'equazione della retta otteniamo $q = y_1 - m * x_1 = 4 - (-3/4) * 3 = 4 + 9/4 = 25/4$.
Sostituendo m e q nell'equazione $\Delta = 0$ otteniamo un'identità, confermando che la retta è tangente alla circonferenza. Quindi, l'equazione della retta tangente è la stessa trovata con il primo metodo:

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$

Quesito 6. Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1.$$

Soluzione: Scriviamo lo sviluppo di Taylor della funzione $\sin(x)$ per $x \sim 0$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^6),$$

per cui il limite richiesto è equivalente a:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^6) - (ax^3 + bx)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\left(a + \frac{1}{6}\right)x^3 + (1 - b)x + o(x^3)}{x^3}.$$

Poiché abbiamo un limite per $x \to 0$, la presenza del termine di primo grado al numeratore renderebbe il risultato del limite $\pm\infty$ (dipendentemente dal valore di b). Pertanto, per ottenere un valore del limite finito, il termine di primo grado al numeratore si deve annullare, quindi si ottiene la condizione: $1 - b = 0$, da cui b=1. Fissando $b = 1$, il limite si riduce ad un rapporto tra polinomi di terzo grado:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\left(a + \frac{1}{6}\right)x^3}{x^3} + \frac{o(x^3)}{x^3} = -a - \frac{1}{6},$$

poiché $\frac{o(x^3)}{x^3} \to 0$ per definizione di o-piccolo. Impostando la condizione richiesta, si ricava $a = -1 - \frac{1}{6} = -\frac{7}{6}$.

Quesito 7. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & x < 0 \\ ax + b & x \geq 0 \end{cases}$$

Determinare per quali valori dei parametri reali a, b la funzione è derivabile. Stabilire se esiste un intervallo di $\mathbb{R}$ in cui la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.

Soluzione: Osserviamo dapprima che la funzione f è continua e derivabile per ogni valore di a e b negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Pertanto é sufficiente studiarne il comportamento attorno ad $x = 0$.
Per prima cosa occorre studiare la continuità della funzione (se f non è continua, non può essere derivabile). Pertanto calcoliamo il limite sinistro:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -1 + \arctan x = -1,$$

e destro:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} ax + b = b,$$

da cui si ricava b=-1 come condizione di continuità, uguagliando i risultati dei due limiti.
Occorre quindi studiare la derivabilità della funzione, fissando $b = -1$:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & x < 0 \\ ax - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Per farlo, si calcola la derivata sinistra $f'_-(x) = \frac{1}{x^2+1}$, valida per $x < 0$, e destra $f'_+(x) = a$, valida per $x > 0$. Analogamente a quanto fatto per la derivabilità, affinché la condizione di derivabilità sia verificata, dobbiamo uguagliare il limite delle due derivate per $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f'_-(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2+1} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'_+(x) = \lim_{x\to 0^-} a = a,$$

da cui otteniamo $a = 1$.

Per la seconda richiesta dell'esercizio occorre ricordare il teorema di Rolle, il quale afferma che: "se una funzione è continua in un intervallo chiuso $[a, b]$, derivabile in ogni punto di tale intervallo, e assume valori uguali $f(a) = f(b)$, esiste almeno un punto interno all'intervallo (a, b) la cui derivata si annulla (f'(c)=0)".
Poiché abbiamo identificato i valori dei parametri per cui la funzione è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, per tali valori lo sarà sicuramente in ogni intervallo chiuso, verificando le prime due ipotesi del teorema. Pertanto, dobbiamo chiederci se esistono due valori a e b in cui $f(a) = f(b)$. Ricordiamo che la funzione con i parametri identificati è

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & x < 0 \\ x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Si osserva facilmente che la funzione è sempre strettamente crescente. Infatti, per $x < 0$ la derivata è $f'_-(x) = \frac{1}{x^2+1}$ (funzione sempre strettamente positiva), mentre per $x \geq 0$ è una retta con coefficiente angolare positivo. Per tale ragione, la funzione non può assumere valori uguali in due punti distinti, e pertanto il teorema di Rolle non può essere applicato.

Quesito 8. Data la funzione $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$, definita nell'insieme dei numeri reali, stabilire per quali valori del parametro $a > 0$ la funzione possiede tre zeri reali distinti.

Soluzione: La funzione $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$ è un polinomio di quinto grado, quindi non si possono trovare analiticamente le sue soluzioni. Tuttavia possiamo notare che la funzione tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$ e a $+\infty$ per $x \to +\infty$. Pertanto, la funzione ha almeno un zero reale.
Inoltre, la derivata della funzione è $f'_a(x) = 5x^4 - 5a$. Questa è un'equazione di quarto grado che ha due zeri reali per $a > 0$, dato che $x = \pm\sqrt[4]{a}$. Dato l'andamento generale ai bordi del dominio di questa funzione e la sua continuità, possiamo sicuramente dire che $x = -\sqrt[4]{a}$ sarà un massimo mentre $x = \sqrt[4]{a}$ un minimo. Lo stesso si può osservare guardando alla derivata seconda, che per $x < 0$ è negativa, mentre per $x > 0$ è positiva.
Considerando ciò, ovvero che la nostra funzione va da $-\infty$ a $+\infty$ e che ha un massimo e un minimo, possiamo dedurre che la funzione originale ha tre zeri reali distinti se e solo se la funzione nel punto di massimo è positiva e nel punto di minimo è negativa. Questo accade quando $f_a(\sqrt[4]{a}) < 0$ e $f_a(-\sqrt[4]{a}) > 0$.
Sostituendo $x = \pm\sqrt[4]{a}$ nell'equazione della funzione otteniamo

$$f_a(\sqrt[4]{a}) = a\sqrt[4]{a} - 5a\sqrt[4]{a} + a = a(1 - 4\sqrt[4]{a}) \tag{26}$$

e

$$f_a(-\sqrt[4]{a}) = -a\sqrt[4]{a} + 5a\sqrt[4]{a} + a = a(1 + 4\sqrt[4]{a}) \tag{27}$$

Imponendo che $f_a(-\sqrt[4]{a}) > 0$, otteniamo $\sqrt[4]{a} > -1/4$, la quale è verificata per ogni $a > 0$. Invece, imponendo $f_a(\sqrt[4]{a}) < 0$, otteniamo $\sqrt[4]{a} > 1/4$, la quale ci dice che affinchè il nostro polinomi abbia 3 zeri reali distinti, dobbiamo avere $a > 1/256$.