**PROBLEMA 2**

**Punto a**

Sussistono tre casi:

- $a < 0$

In questo caso il dominio della funzione è R in quanto il denominatore $x^2 - a$ risulta essere sempre positivo, di conseguenza non esistono discontinuità;

- $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

In questo caso il dominio della funzione è dato dai valori di $x$ tali per cui:

$$x^2 - a \neq 0 \rightarrow x \neq \pm\sqrt{a}$$

In questo caso $x = \pm\sqrt{a}$ sono ascisse di punti di discontinuità di seconda specie e le rette $x = \pm\sqrt{a}$ sono asintoti verticali in quanto:

$$\frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a\left(1-\sqrt{a}\right)}{0^-} = +\infty$$

$$\frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a\left(1-\sqrt{a}\right)}{0^+} = -\infty$$

$$\frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a\left(1+\sqrt{a}\right)}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a\left(1+\sqrt{a}\right)}{0^-} = -\infty$$

- $a = 1$

La funzione ha come dominio $x \neq \pm 1$ e $x = 1$ è di discontinuità eliminabile di terza specie in quanto

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

In questo caso $x = -1$ è ascissa di discontinuità di seconda specie e la retta $x = -1$ è asintoto verticale in quanto:

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

In tutti i casi la famiglia di funzione presenta per $a \neq 0$ la retta $y = 1$ come asintoto orizzontale in quanto:

- Se $a \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

$$\frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = 1$$

- Se $a = 1$

$$\frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{x}{x+1} = 1$$

**Punto b**

L'intersezione tra $f_a(x) = \frac{x^2-ax}{x^2-a}$ con la retta $y = 1$ deve soddisfare l'equazione seguente:

$$\frac{x^2-ax}{x^2-a} = 1 \rightarrow x^2 - ax = x^2 - a \rightarrow a(x - 1) = 0 \rightarrow x = 1$$

Quindi il punto di intersezione è $P(1, 1)$ per $a \neq 1$.

Calcoliamo la derivata prima di $f_a(x) = \frac{x^2-ax}{x^2-a}$, si ha:

$$f'_a(x) = \frac{(2x-a)(x^2-a)-2x(x^2-ax)}{(x^2-a)^2} =$$

$$= \frac{2x^3-2ax-ax^2+a^2-2x^3+2ax^2}{(x^2-a)^2} =$$

$$= \frac{ax^2-2ax+a^2}{(x^2-a)^2}$$

La retta tangente nell'origine ha equazione

$$y = mx$$

con

$$m = f'_a(0) = \left[\frac{ax^2-2ax+a^2}{(x^2-a)^2}\right]_{x=0} = 1$$

Pertanto, la tangente nell'origine è indipendente dal parametro $a$ ed ha equazione

$$y = x$$

**Punto c**

Consideriamo il caso $a \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$.

La derivata prima è stata calcolata nel punto precedente ed è:

$$f'_a(x) = \frac{ax^2-2ax+a^2}{(x^2-a)^2} = \frac{a(x^2-2x+a)}{(x^2-a)^2}$$

Studiamo il fattore $(x^2 - 2x + a)$ del numeratore, in particolare il suo discriminante è:

$$\Delta = 4(1 - a)$$

Pertanto, nel caso $a \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, il discriminante è sempre positivo e la funzione presenta due estremanti.

Per capire la tipologia di estremante dobbiamo considerare due casi:

- $a < 0$

In questo caso il numeratore della derivata prima è positivo se

$$(x^2 - 2x + a) < 0 \rightarrow 1 - \sqrt{1 - a} < x < 1 + \sqrt{1 - a}$$

di conseguenza la funzione è strettamente crescente per $x \in (1 - \sqrt{1 - a}, 1 + \sqrt{1 - a})$ ovvero

$x = 1 - \sqrt{1 - a}$ è ascissa di minimo relativo e $x = 1 + \sqrt{1 - a}$ è ascissa di massimo relativo;

- $0 < a < 1$

In questo caso il numeratore della derivata prima è positivo se

$$\left(x^2 - 2x + a\right) > 0 \rightarrow x < 1 - \sqrt{1 - a} \vee x > 1 + \sqrt{1 - a}$$

di conseguenza la funzione è strettamente crescente per $x \in \left(-\infty, 1 - \sqrt{1 - a}\right) \cup \left(1 + \sqrt{1 - a}, +\infty\right)$ ovvero

$x = 1 - \sqrt{1 - a}$ è ascissa di massimo relativo e $x = 1 + \sqrt{1 - a}$ è ascissa di minimo relativo.

Consideriamo ora $a = -1$ e studiamo la funzione $f_{-1}(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$.

- **Dominio**: R;
- **Intersezione asse ascisse**: $x^2 + x = 0 \rightarrow x = -1 \vee x = 0$;
- **Intersezione asse ordinate**: $x = 0 \rightarrow y = 0$;
- **Positività**: $\frac{x^2+x}{x^2+1} > 0 \rightarrow x < -1 \vee x > 0$;
- **Asintoti verticali**: come da Punto a non esistono asintoti verticali;
- **Asintoti orizzontali**: come da Punto a $y = 1$ è asintoto orizzontale destro e sinistro;
- **Asintoti obliqui**: trattandosi di una funzione razionale fratta, la presenza dell'asintoto orizzontale esclude quella dell'asintoto obliquo;
- **Crescenza e decrescenza**: come sopra evidenziato, funzione è strettamente crescente per $x \in \left(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$ ovvero $x = 1 - \sqrt{2}$ è ascissa di minimo relativo e $x = 1 + \sqrt{2}$ è ascissa di massimo relativo, in particolare di seguito i punti di minimo e massimo relativo:

$$m\left(1 - \sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$M\left(1 + \sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$$

- **Concavità e convessità**: la derivata seconda ha equazione:

$$f''_{-1}(x) = \frac{2(x+1)\left(x^2-4x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

  che è positiva per $(x + 1)\left(x^2 - 4x + 1\right) > 0$ ovvero se $x \in \left(-1, 2 - \sqrt{3}\right) \cup \left(2 + \sqrt{3}, +\infty\right)$ ed è negativa se $x \in (-\infty, -1) \cup \left(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\right)$ pertanto la funzione è convessa negli intervalli $x \in \left(-1, 2 - \sqrt{3}\right) \cup \left(2 + \sqrt{3}, +\infty\right)$ ed è concava negli intervalli $x \in (-\infty, -1) \cup \left(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\right)$.

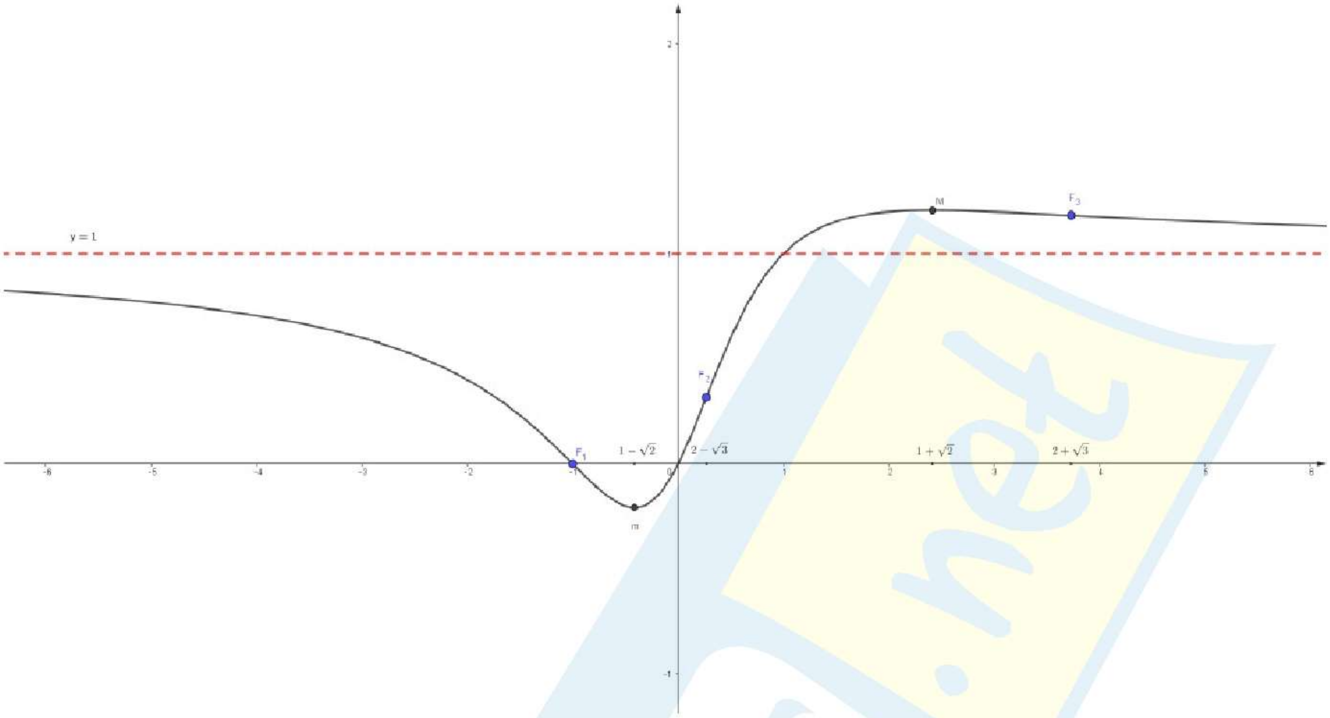
  Deduciamo quindi che la funzione presenta tre flessi a tangente obliqua:

$$F_1(-1, 0)$$

$$F_2\left(2 - \sqrt{3}, \frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)$$

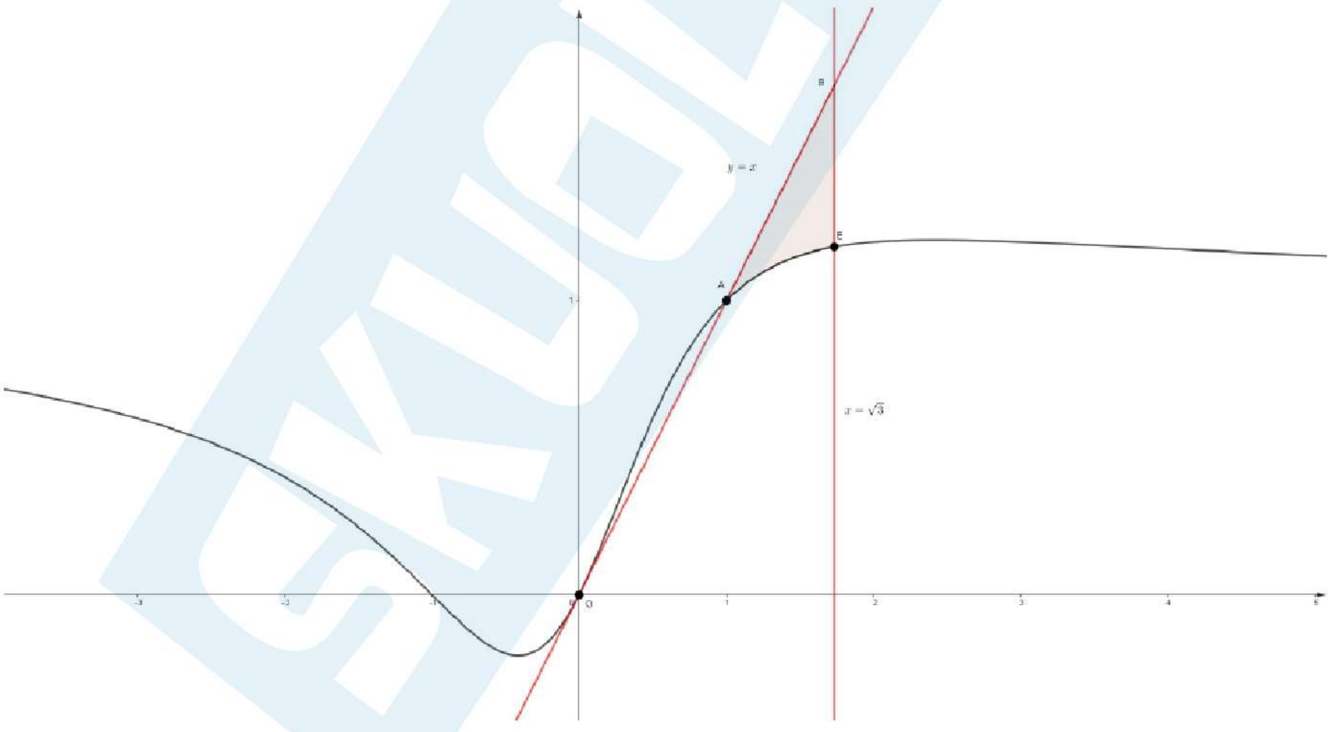
$$F_3\left(2 + \sqrt{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)$$

  Di seguito il grafico di $f_{-1}(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$.




**Punto d**

L'area da calcolare è di seguito raffigurata ed è rappresentata dal triangolo mistilineo ABE.




Tale area è pari a:

$$S = \int_{1}^{\sqrt{3}} \left( x - \frac{x^2+x}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \int_{1}^{\sqrt{3}} \left( x - \frac{x^2+1+x-1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \int_{1}^{\sqrt{3}} \left( x - 1 - \frac{1}{2} \bullet \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \left[ \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{1}{2} \bullet \ln ln \left( x^2 + 1 \right) + x \right]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \left[ \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2} - \frac{1}{2} \bullet \ln ln\,(4) + \frac{\pi}{3} \right] - \left[ 0 - \frac{1}{2} \bullet \ln ln\,(2) + \frac{\pi}{4} \right] =$$

$$= 2 - \sqrt{3} - \frac{1}{2} \bullet \ln ln\,(2) + \frac{\pi}{12} \cong 0.18$$