PROBLEMA 2

Punto a

Sussistono quattro casi da analizzare:

- $a < 0$
- $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$
- $a = 1$
- $a \in (1, +\infty)$

Studiamo distintamente i sopra citati quattro casi.

- $a < 0$

In questo caso il dominio della funzione è R in quanto il denominatore $x^2 - a$ risulta essere sempre positivo, di conseguenza non esistono discontinuità né asintoti verticali;

- $a \in (0,1)$

In questo caso il dominio della funzione è dato dai valori di x tali per cui:

$$x^2 - a \neq 0 \rightarrow x \neq \pm\sqrt{a}$$

In questo caso $x = \pm\sqrt{a}$ sono ascisse di punti di discontinuità di seconda specie e le rette $x = \pm\sqrt{a}$ sono asintoti verticali destro e sinistro in quanto:

$$\lim_{x \to \sqrt{a}^-} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a(1 - \sqrt{a})}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \sqrt{a}^+} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a(1 - \sqrt{a})}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{a}^-} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a(1 + \sqrt{a})}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{a}^+} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a(1 + \sqrt{a})}{0^-} = -\infty$$

- $a = 1$

La funzione ha come dominio $x \neq \pm 1$ e $x = 1$ è di discontinuità eliminabile di terza specie in quanto

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

In questo caso $x = -1$ è ascissa di discontinuità di seconda specie e la retta $x = -1$ è asintoto verticale destro e sinistro in quanto:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

- $a \in (1, +\infty)$

In questo caso il dominio della funzione è dato dai valori di x tali per cui:

$$x^2 - a \neq 0 \rightarrow x \neq \pm\sqrt{a}$$

In questo caso $x = \pm\sqrt{a}$ sono ascisse di punti di discontinuità di seconda specie e le rette $x = \pm\sqrt{a}$ sono asintoti verticali destro e sinistro in quanto:

$$\lim_{x\rightarrow\sqrt{a}^-} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a(1-\sqrt{a})}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\rightarrow\sqrt{a}^+} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a(1-\sqrt{a})}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\rightarrow-\sqrt{a}^-} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a(1+\sqrt{a})}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\rightarrow-\sqrt{a}^+} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{a(1+\sqrt{a})}{0^-} = -\infty$$

In tutti i casi la famiglia di funzione presenta per $a \neq 0$ la retta $y = 1$ come asintoto orizzontale in quanto:

- Se $a \in (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, +\infty)$

$$\lim_{x\rightarrow\pm\infty} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = 1$$

- Se $a = 1$

$$\lim_{x\rightarrow\pm\infty} \frac{x^2-ax}{x^2-a} = \lim_{x\rightarrow\pm\infty} \frac{x^2-x}{x^2-1} = \lim_{x\rightarrow\pm\infty} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\rightarrow\pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

Punto b

L'intersezione tra $f_a(x) = \frac{x^2-ax}{x^2-a}$ con la retta $y = 1$ deve soddisfare l'equazione seguente:

$$\frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = 1 \rightarrow x^2 - ax = x^2 - a \rightarrow a(x-1) = 0 \rightarrow x = 1$$

Quindi il punto di intersezione è $P(1,1)$ per $a \neq 1$.

Calcoliamo la derivata prima di $f_a(x) = \frac{x^2-ax}{x^2-a}$, si ha:

$$f_a'(x) = \frac{(2x-a)(x^2-a) - 2x(x^2-ax)}{(x^2-a)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - 2ax - ax^2 + a^2 - 2x^3 + 2ax^2}{(x^2-a)^2} =$$

$$= \frac{ax^2 - 2ax + a^2}{(x^2-a)^2}$$

La retta tangente nell'origine ha equazione

$$y = mx$$

con

$$m = f_a'(0) = \left[\frac{ax^2 - 2ax + a^2}{(x^2-a)^2}\right]_{x=0} = 1$$

Pertanto, la tangente nell'origine è indipendente dal parametro a ed ha equazione

$$y = x$$

Punto c

Consideriamo il caso $a \in (-\infty, 0) \cup (0,1)$.

La derivata prima è stata calcolata nel punto precedente ed è:

$$f_a'(x) = \frac{ax^2 - 2ax + a^2}{(x^2 - a)^2} = \frac{a(x^2 - 2x + a)}{(x^2 - a)^2}$$

Studiamo il fattore $(x^2 - 2x + a)$ del numeratore, in particolare il suo discriminante è:

$$\Delta = 4(1 - a)$$

Pertanto, nel caso $a \in (-\infty, 0) \cup (0,1)$, il discriminante è sempre positivo e la funzione presenta due estremanti.

Per capire la tipologia di estremante dobbiamo considerare due casi:

- $a < 0$

In questo caso il numeratore della derivata prima è positivo se

$$(x^2 - 2x + a) < 0 \rightarrow 1 - \sqrt{1 - a} < x < 1 + \sqrt{1 - a}$$

di conseguenza la funzione è strettamente crescente per $x \in \left(1 - \sqrt{1 - a}, 1 + \sqrt{1 - a}\right)$ e strettamente decrescente per $x \in \left(-\infty, 1 - \sqrt{1 - a}\right) \cup \left(1 + \sqrt{1 - a}, +\infty\right)$ pertanto

  - $x = 1 - \sqrt{1 - a}$ è ascissa di minimo relativo;
  - $x = 1 + \sqrt{1 - a}$ è ascissa di massimo relativo;

- $0 < a < 1$

In questo caso il numeratore della derivata prima è positivo se

$$(x^2 - 2x + a) > 0$$

Prima di studiare il segno della disequazione soprastante, calcoliamo i punti in cui

$$(x^2 - 2x + a) = 0$$

ovvero

$$x = 1 - \sqrt{1 - a} \vee x = 1 + \sqrt{1 - a}$$

In questo caso bisogna tener conto che $x = \pm\sqrt{a}$ sono asintoti verticali, pertanto, per definire correttamente la monotonia dobbiamo verificare dove si posizionano gi asintoti verticali rispetto alle ascisse dei punti in cui si annulla la derivata prima.

Sicuramente $1 + \sqrt{1 - a}$ è maggiore d 1 e quindi anche di $\pm\sqrt{a}$, così come $1 - \sqrt{1 - a}$ è positivo e maggiore di $-\sqrt{a}$.

Verifichiamo che $1 - \sqrt{1 - a} < \sqrt{a}$, si ha:

$$1 - \sqrt{1 - a} < \sqrt{a} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{1 - a} > 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\sqrt{a} + \sqrt{1 - a}\right)^2 > (1)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow a + (1-a) + 2\sqrt{a}\sqrt{1-a} > 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\sqrt{a}\sqrt{1-a} > 0$$

condizione quest'ultima sempre verificata per $0 < a < 1$.

Di conseguenza la derivata prima è positiva per

$$x < -\sqrt{a} \vee -\sqrt{a} < x < 1 - \sqrt{1-a} \vee x > 1 + \sqrt{1-a}$$

e quindi la funzione è strettamente crescente per $x \in (-\infty, -\sqrt{a}) \cup (-\sqrt{a}, 1-\sqrt{1-a}) \cup (1+\sqrt{1-a}, +\infty)$ e strettamente decrescente per $x \in (1-\sqrt{1-a}, \sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, 1+\sqrt{1-a})$ pertanto

- $x = 1 - \sqrt{1-a}$ è ascissa di massimo relativo;
- $x = 1 + \sqrt{1-a}$ è ascissa di minimo relativo.

Consideriamo ora $a = -1$ e studiamo la funzione $f_{-1}(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$.

- **Dominio**: R;
- **Intersezione asse ascisse**: $x^2 + x = 0 \rightarrow x = -1 \vee x = 0$;
- **Intersezione asse ordinate**: $x = 0 \rightarrow y = 0$;
- **Positività**: $\frac{x^2+x}{x^2+1} > 0 \rightarrow x < -1 \vee x > 0$;
- **Asintoti verticali**: come da Punto a non esistono asintoti verticali;
- **Asintoti orizzontali**: come da Punto a $y = 1$ è asintoto orizzontale destro e sinistro;
- **Asintoti obliqui**: trattandosi di una funzione razionale fratta, la presenza dell'asintoto orizzontale esclude quella dell'asintoto obliquo;
- **Crescenza e decrescenza**: come sopra evidenziato, funzione è strettamente crescente per $x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ ovvero $x = 1-\sqrt{2}$ è ascissa di minimo relativo e $x = 1+\sqrt{2}$ è ascissa di massimo relativo, in particolare di seguito i punti di minimo e massimo relativo:

$$m\left(1-\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$M\left(1+\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$$

- **Concavità e convessità**: la derivata seconda ha equazione:

$$f''_{-1}(x) = \frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$$

che è positiva per $(x+1)(x^2-4x+1) > 0$ ovvero se $x \in (-1, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, +\infty)$ ed è negativa se $x \in (-\infty, -1) \cup (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ pertanto la funzione è convessa negli intervalli $x \in (-1, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, +\infty)$ ed è concava negli intervalli $x \in (-\infty, -1) \cup (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$.

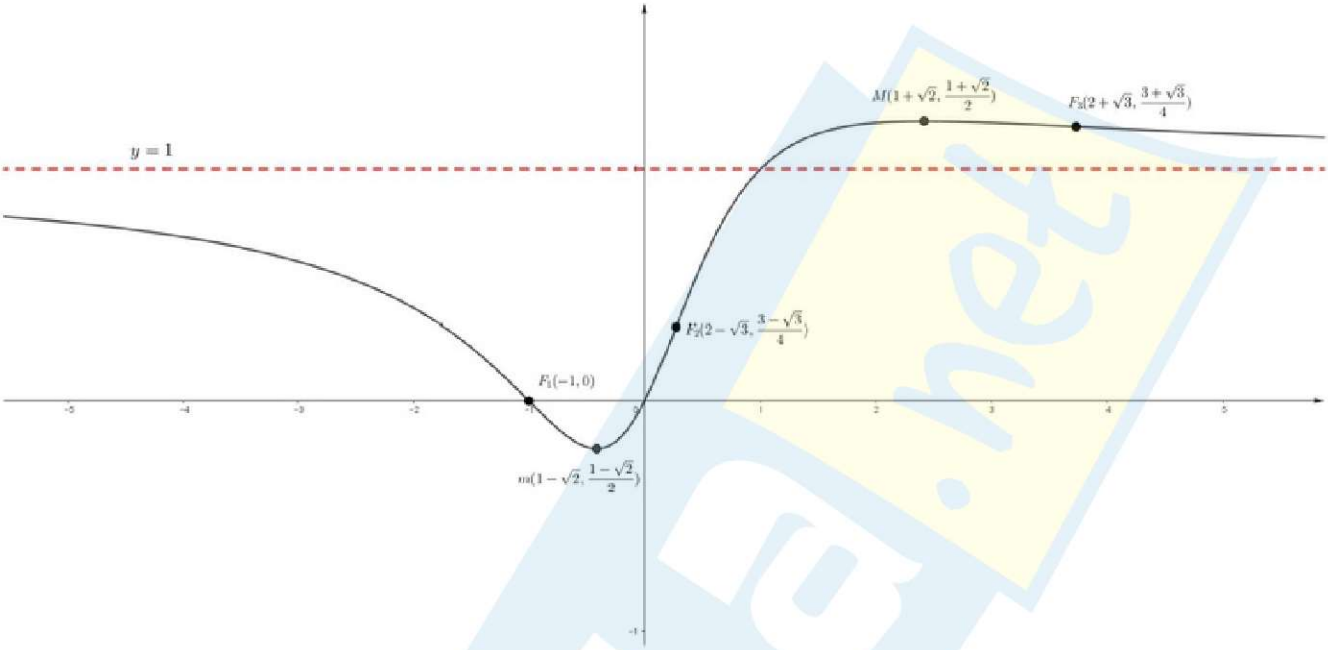
Deduciamo quindi che la funzione presenta tre flessi a tangente obliqua:

$$F_1(-1,0)$$

$$F_2\left(2-\sqrt{3}, \frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$F_3\left(2+\sqrt{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)$$

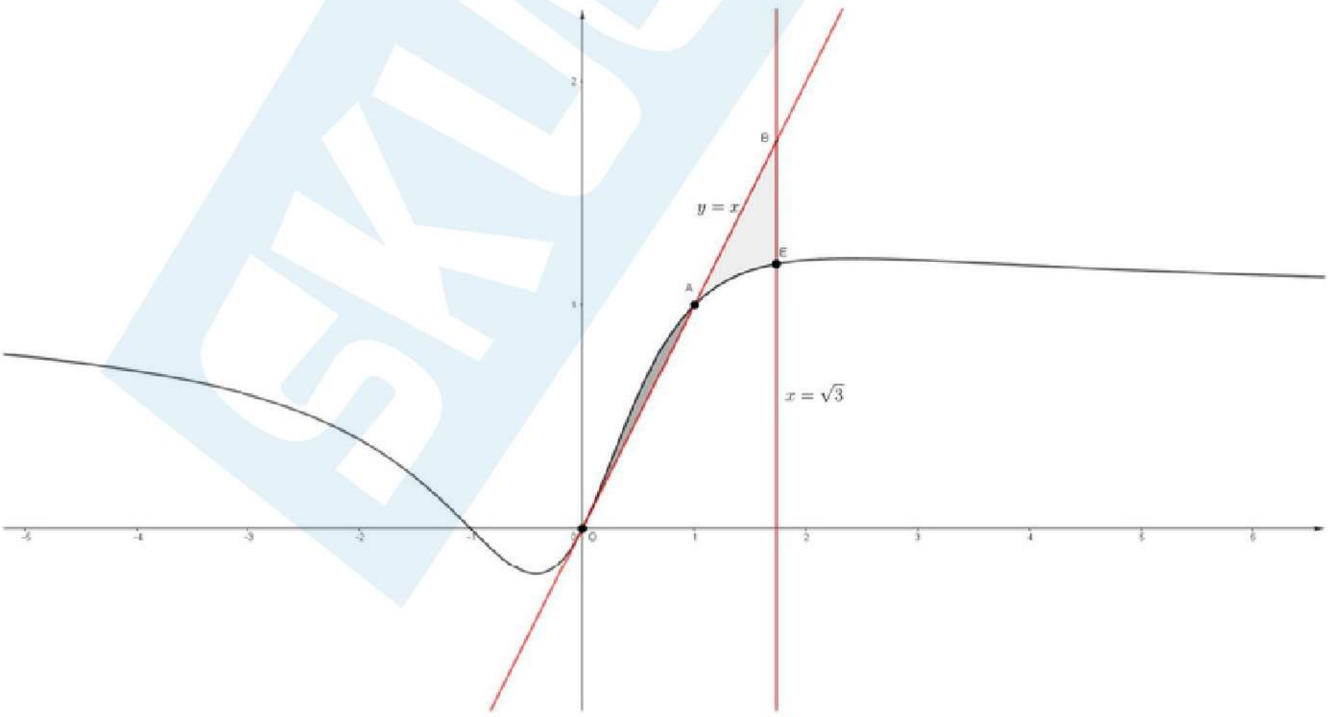
Di seguito il grafico di $f_{-1}(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$.



Punto 4

Tale quesito si presta a una duplice interpretazione in termini di area da calcolare ovvero se considerare anche l'area della regione di piano compresa tra il grafico della curva ed il segmento OP nell'intervallo $[0,1]$.

Si faccia riferimento alla figura sottostante.



Consideriamo prima il caso in cui l'area da calcolare è rappresentata solo dal triangolo mistilineo PBE raffigurato in grigio chiaro.

Tale area è pari a:

$$S = \int_1^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}\right) dx =$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x^2 + 1 + x - 1}{x^2 + 1}\right) dx =$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \left(x - 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) + \tan^{-1} x\right]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \left[\frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \ln(4) + \frac{\pi}{3}\right] - \left[0 - \frac{1}{2} \cdot \ln(2) + \frac{\pi}{4}\right] =$$

$$= 2 - \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \ln(2) + \frac{\pi}{12} \cong 0{,}18$$

Se consideriamo anche l'area della regione di piano compresa tra il grafico della curva ed il segmento OP nell'intervallo [0,1] raffigurato in grigio scuro, allora l'area diventa:

$$S = \int_0^1 \left(\frac{x^2 + x}{x^2 + 1} - x\right) dx + \int_1^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}\right) dx$$

dove il secondo contributo è già stato calcolato, mentre il primo contributo è:

$$\int_0^1 \left(\frac{x^2 + x}{x^2 + 1} - x\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2 + 1 + x - 1}{x^2 + 1} - x\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(-x + 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{(-x+1)^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) - \tan^{-1} x\right]_0^1 =$$

$$= \left[0 + \frac{1}{2} \cdot \ln(2) - \frac{\pi}{4}\right] - \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln(1) - 0\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln(2) - \frac{\pi}{4}$$

Pertanto, in questo secondo caso l'area diventa

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln(2) - \frac{\pi}{4} + 2 - \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \ln(2) + \frac{\pi}{12} =$$

$$= \frac{5}{2} - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \cong 0{,}24$$